**Математическая логика и теория алгоритмов**

**1. Класс функций T0**

**Определение класса T0**

Класс функций T0 (класс функций, сохраняющих константу 0) — это множество всех булевых функций f(x₁, x₂, ..., xₙ), которые принимают значение 0, когда все переменные равны 0:

f(0, 0, ..., 0) = 0

Другими словами, класс T0 состоит из всех булевых функций, которые отображают нулевой набор в 0.

**Доказательство замкнутости класса T0**

Для доказательства замкнутости класса T0 относительно операции суперпозиции нужно показать, что любая суперпозиция функций из T0 также принадлежит классу T0.

**Замкнутость относительно подстановки констант**: Если f(x₁, x₂, ..., xₙ) ∈ T0 и некоторые переменные заменяются константами, то полученная функция также принадлежит T0.

Если f(x₁, x₂, ..., xₙ) ∈ T0, то f(0, 0, ..., 0) = 0.

При подстановке констант в некоторые аргументы получается функция g от меньшего числа переменных. Для набора (0, 0, ..., 0) значение g совпадает со значением f на наборе, где подставленные константы остаются, а все остальные аргументы равны 0. Поскольку f ∈ T0, то g также принадлежит T0.

**Замкнутость относительно перестановки переменных**: Если f(x₁, x₂, ..., xₙ) ∈ T0, то любая перестановка аргументов (например, f(x₂, x₁, ..., xₙ)) также дает функцию из T0.

Это очевидно, так как f(0, 0, ..., 0) = 0, и при перестановке аргументов набор (0, 0, ..., 0) перейдет в себя.

**Замкнутость относительно суперпозиции**: Если f(x₁, x₂, ..., xₙ) ∈ T0 и g₁, g₂, ..., gₙ∈ T0, то h(x) = f(g₁(x), g₂(x), ..., gₙ(x)) также принадлежит T0.

Если все g ∈ T0, то g(0, 0, ..., 0) = 0 для всех i.

Тогда h(0, 0, ..., 0) = f(g₁(0, 0, ..., 0), g₂(0, 0, ..., 0), ..., gₙ(0, 0, ..., 0)) = f(0, 0, ..., 0) = 0.

Следовательно, h ∈ T0.

Таким образом, класс функций T0 замкнут относительно операции суперпозиции.

**2. Класс функций T1**

**Определение класса T1**

Класс функций T1 (класс функций, сохраняющих константу 1) — это множество всех булевых функций f(x₁, x₂, ..., xₙ), которые принимают значение 1, когда все переменные равны 1:

f(1, 1, ..., 1) = 1

Другими словами, класс T1 состоит из всех булевых функций, которые отображают единичный набор в 1.

**Доказательство замкнутости класса T1**

Для доказательства замкнутости класса T1 относительно операции суперпозиции нужно показать, что любая суперпозиция функций из T1 также принадлежит классу T1.

**Замкнутость относительно подстановки констант**: Если f(x₁, x₂, ..., xₙ) ∈ T1 и некоторые переменные заменяются константами, то полученная функция также принадлежит T1.

Если f(x₁, x₂, ..., xₙ) ∈ T1, то f(1, 1, ..., 1) = 1.

При подстановке констант в некоторые аргументы получается функция g от меньшего числа переменных.

Однако, если константы отличны от 1, то это не гарантирует, что g ∈ T1. Поэтому нужно рассмотреть случай, когда все подстановки равны 1.

Если подставляются только константы 1, то при наборе (1, 1, ..., 1) значение g совпадает со значением f на наборе из одних единиц. Поскольку f ∈ T1, то g также принадлежит T1.

**Замкнутость относительно перестановки переменных**: Если f(x₁, x₂, ..., xₙ) ∈ T1, то любая перестановка аргументов (например, f(x₂, x₁, ..., xₙ)) также дает функцию из T1.

Это очевидно, так как f(1, 1, ..., 1) = 1, и при перестановке аргументов набор (1, 1, ..., 1) перейдет в себя.

**Замкнутость относительно суперпозиции**: Если f(x₁, x₂, ..., xₙ) ∈ T1 и g₁, g₂, ..., gₙ∈ T1, то h(x) = f(g₁(x), g₂(x), ..., gₙ(x)) также принадлежит T1.

Если все g ∈ T1, то g(1, 1, ..., 1) = 1 для всех i.

Тогда h(1, 1, ..., 1) = f(g₁(1, 1, ..., 1), g₂(1, 1, ..., 1), ..., gₙ(1, 1, ..., 1)) = f(1, 1, ..., 1) = 1.

Следовательно, h ∈ T1.

Таким образом, класс функций T1 замкнут относительно операции суперпозиции.

**3. Построение СДНФ для функции, заданной таблицей**

**Определение СДНФ**

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) булевой функции f(x₁, x₂, ..., xₙ) — это дизъюнкция элементарных конъюнкций, каждая из которых соответствует набору значений переменных, на котором функция принимает значение 1. При этом в каждую элементарную конъюнкцию входят все переменные либо в прямом, либо в инверсном виде.

**Алгоритм построения СДНФ**

**1. Выявление наборов, на которых функция равна 1** По таблице истинности выбираются все наборызначений переменных (x₁, x₂, ..., xₙ), на которых функция f принимает значение 1.

**2. Формирование элементарных конъюнкций**: Для каждого такого набора (a₁, a₂, ..., aₙ) формируется элементарная конъюнкция, в которую входят все переменные:

Если a = 1, то в конъюнкцию включается x

Если a = 0, то в конъюнкцию включается ¬x

**3. Построение СДНФ**: СДНФ получается путем объединения всех полученных элементарных конъюнкций операцией дизъюнкции (логическое ИЛИ).

**Пример построения СДНФ**

Пусть задана функция f(x₁, x₂, x₃) следующей таблицей истинности:

**x₁ x₂ x₃ f**

0 0 0 0

0 0 1 1

0 1 0 0

0 1 1 0

1 0 0 1

1 0 1 0

1 1 0 1

1 1 1 1

1. Выбираем наборы, на которых f = 1:

(0, 0, 1)

(1, 0, 0)

(1, 1, 0)

(1, 1, 1)

2. Формируем элементарные конъюнкции:

◦ Для набора (0, 0, 1): ¬x₁∧ ¬x₂∧ x₃

◦ Для набора (1, 0, 0): x₁∧ ¬x₂∧ ¬x₃

◦ Для набора (1, 1, 0): x₁∧ x₂∧ ¬x₃

◦ Для набора (1, 1, 1): x₁∧ x₂∧ x₃

3. Строим СДНФ: f(x₁, x₂, x₃) = (¬x₁∧ ¬x₂∧ x₃) ∨ (x₁∧ ¬x₂∧ ¬x₃) ∨ (x₁∧ x₂∧ ¬x₃) ∨ (x₁∧ x₂∧ x₃)

Используя стандартные обозначения: f(x₁, x₂, x₃) = x̄₁x̄₂x₃∨ x₁x̄₂x̄₃∨ x₁x₂x̄₃∨ x₁x₂x₃

**4. Построение СКНФ для функции, заданной таблицей**

**Определение СКНФ**

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ) булевой функции f(x₁, x₂, ..., xₙ) — это конъюнкция элементарных дизъюнкций, каждая из которых соответствует набору значений переменных, на котором функция принимает значение 0. При этом в каждую элементарную дизъюнкцию входят все переменные либо в прямом, либо в инверсном виде.

**Алгоритм построения СКНФ**

**Выявление наборов, на которых функция равна 0**: По таблице истинности выбираются все наборы значений переменных (x₁, x₂, ..., xₙ), на которых функция f принимает значение 0.  
**Формирование элементарных дизъюнкций**: Для каждого такого набора (a₁, a₂, ..., aₙ) формируется элементарная дизъюнкция, в которую входят все переменные:  
 Если a = 0, то в дизъюнкцию включается x  
 Если a = 1, то в дизъюнкцию включается ¬x  
**Построение СКНФ**: СКНФ получается путем объединения всех полученных элементарных дизъюнкций операцией конъюнкции (логическое И).

**Пример построения СКНФ**

Используем ту же функцию f(x₁, x₂, x₃), что и в предыдущем примере:

**x₁ x₂ x₃ f**

0 0 0 0

0 0 1 1

0 1 0 0

0 1 1 0

1 0 0 1

1 0 1 0

1 1 0 1

1 1 1 1

1. Выбираем наборы, на которых f = 0:

(0, 0, 0)

(0, 1, 0)

(0, 1, 1)

(1, 0, 1)

2. Формируем элементарные дизъюнкции:

◦ Для набора (0, 0, 0): x₁∨ x₂∨ x₃

◦ Для набора (0, 1, 0): x₁∨ ¬x₂∨ x₃

◦ Для набора (0, 1, 1): x₁∨ ¬x₂∨ ¬x₃

◦ Для набора (1, 0, 1): ¬x₁∨ x₂∨ ¬x₃

3. Строим СКНФ: f(x₁, x₂, x₃) = (x₁∨ x₂∨ x₃) ∧ (x₁∨ ¬x₂∨ x₃) ∧ (x₁∨ ¬x₂∨ ¬x₃) ∧ (¬x₁∨ x₂∨ ¬x₃)

**5. Определение логического следствия и теоремы**

**Определение логического следствия**

Логическое следствие — это отношение между формулами (высказываниями) в логике, при котором одна формула (следствие) обязательно истинна, если истинны другие формулы (посылки).

Формально: формула B является логическим следствием формул A₁, A₂, ..., Aₙ (обозначается A₁, A₂, ..., Aₙ ⊨ B), если для любой интерпретации I, в которой все формулы A₁, A₂, ..., Aₙ истинны, формула B также истинна.

В терминах теории моделей: B является логическим следствием A₁, A₂, ..., Aₙ, если любая модель множества формул {A₁, A₂, ..., Aₙ} является также моделью формулы B.

**Теорема 1 о логическом следствии**

**Теорема 1**: Формула B является логическим следствием формул A₁, A₂, ..., Aₙ тогда и только тогда, когда формула (A₁∧ A₂∧ ... ∧ Aₙ) → B является тавтологией.

**Доказательство**:

Пусть B является логическим следствием A₁, A₂, ..., Aₙ. Нужно доказать, что (A₁∧ A₂∧ ... ∧ Aₙ) → B — тавтология.

Предположим, что (A₁∧ A₂∧ ... ∧ Aₙ) → B не является тавтологией. Тогда существует интерпретация I, в которой (A₁∧ A₂∧ ... ∧ Aₙ) истинно, а B ложно. Но это противоречит тому, что B является логическим следствием A₁, A₂, ..., Aₙ, так как по определению, если все посылки истинны, то и следствие должно быть истинным.

Пусть (A₁∧ A₂∧ ... ∧ Aₙ) → B — тавтология. Нужно доказать, что B является логическим следствием A₁, A₂, ..., Aₙ.

Пусть I — произвольная интерпретация, в которой все формулы A₁, A₂, ..., Aₙ истинны. Тогда в этой интерпретации конъюнкция (A₁∧ A₂∧ ... ∧ Aₙ) также истинна. Поскольку (A₁∧ A₂∧ ... ∧ Aₙ) → B — тавтология, то в интерпретации I формула B также истинна. Таким образом, B является логическим следствием A₁, A₂, ..., Aₙ.

**Теорема 2 о логическом следствии**

**Теорема 2**: Формула B является логическим следствием формул A₁, A₂, ..., Aₙ тогда и только тогда, когда формула (A₁∧ A₂∧ ... ∧ Aₙ∧ ¬B) противоречива (невыполнима).

**Доказательство**:

Пусть B является логическим следствием A₁, A₂, ..., Aₙ. Нужно доказать, что (A₁∧ A₂∧ ... ∧ Aₙ∧ ¬B) противоречива.

Предположим, что формула (A₁∧ A₂∧ ... ∧ Aₙ∧ ¬B) выполнима. Тогда существует интерпретация I, в которой эта формула истинна. Это означает, что в I все формулы A₁, A₂, ..., Aₙ истинны, а B ложна. Но это противоречит тому, что B является логическим следствием A₁, A₂, ..., Aₙ, так как по определению, если все посылки истинны, то и следствие должно быть истинным.

Пусть (A₁∧ A₂∧ ... ∧ Aₙ∧ ¬B) противоречива. Нужно доказать, что B является логическим следствием A₁, A₂, ..., Aₙ.

Пусть I — произвольная интерпретация, в которой все формулы A₁, A₂, ..., Aₙ истинны. Предположим, что в этой интерпретации формула B ложна. Тогда в I формула ¬B истинна, а значит, истинна и конъюнкция (A₁∧ A₂∧ ... ∧ Aₙ∧ ¬B). Но это противоречит тому, что (A₁∧ A₂∧ ... ∧ Aₙ∧ ¬B) невыполнима. Следовательно, в интерпретации I формула B истинна, что и доказывает, что B является логическим следствием A₁, A₂, ..., Aₙ.

**6. Алгоритм Куайна-МакКлоски для перечисления простых** **импликантов**

**Определение импликанты и простой импликанты**

**Импликанта** булевой функции f — это конъюнкция литералов (переменных или их отрицаний), такая что если эта конъюнкция истинна, то и функция f истинна.

**Простая импликанта** булевой функции f — это такая импликанта, что удаление любого литерала из неё приводит к конъюнкции, которая уже не является импликантой для f.

**Алгоритм Куайна-МакКлоски**

Алгоритм Куайна-МакКлоски используется для нахождения всех простых импликант булевой функции и последующего построения минимальной ДНФ.

**Шаги алгоритма в общем виде**

**Построение СДНФ**: Для заданной булевой функции f строится совершенная дизъюнктивная нормальнаяформа (СДНФ).

**Инициализация**: Конъюнкции из СДНФ группируются по числу вхождений прямых переменных (т.е. переменных без отрицания).

**Этап 1: Нахождение простых импликант**:

a. Конъюнкции из соседних групп (отличающихся на 1 по числу прямых переменных) попарно сравниваются. b. Если две конъюнкции отличаются только в одной переменной (одна содержит переменную, другая — её отрицание), то выполняется операция склеивания: образуется новая конъюнкция, не содержащая этой переменной.

c. Исходные конъюнкции помечаются как использованные в склеивании.

d. Процесс продолжается до тех пор, пока возможны новые склеивания.

e. Все конъюнкции, не помеченные как использованные в склеивании, являются простыми импликантами.

**Этап 2: Построение минимальной ДНФ**:

a. Составляется таблица покрытия, где строки соответствуют простым импликантам, а столбцы — наборам значений переменных, на которых функция f принимает значение 1.

b. В ячейке таблицы ставится отметка, если соответствующая простая импликанта принимает значение 1 на соответствующем наборе.

c. Выбираются обязательные простые импликанты (те, которые единственные покрывают хотя бы один набор). d. Для оставшихся непокрытыми наборов решается задача о минимальном покрытии.

5. **Построение результата**: Минимальная ДНФ получается как дизъюнкция выбранных простых импликант.

**7. Предваренная нормальная форма (ПНФ) и алгоритм преобразования**

**Определение предваренной нормальной формы**

Предваренная нормальная форма (ПНФ) — это форма записи формулы логики предикатов, в которой все кванторы вынесены в начало формулы (образуют префикс), а за ними следует бескванторная часть (матрица).

Общий вид ПНФ: Q₁x₁ Q₂x₂ ... Qₙxₙ M(x₁, x₂, ..., xₙ)

где Q₁, Q₂, ..., Qₙ — кванторы (∀ или ∃), а M — бескванторная формула, называемая матрицей.

**10 правил преобразования для ПНФ**

1. **Устранение импликации**: A→B эквивалентно ¬A ∨ B

2. **Устранение эквивалентности**: A ↔ B эквивалентно (A → B) ∧ (B → A), или после устранения импликации:

(¬A ∨ B) ∧ (¬B ∨ A)

3. **Ограничение области действия отрицания**:

◦ ¬(A ∧ B) эквивалентно ¬A ∨ ¬B (закон де Моргана)

◦ ¬(A ∨ B) эквивалентно ¬A ∧ ¬B (закон де Моргана)

◦ ¬¬A эквивалентно A (закон двойного отрицания)

**4. Переименование связанных переменных**: Если x связана квантором и в формуле есть другая переменная с тем же именем, то x переименовывается для устранения конфликта имен.

5. **Устранение отрицания перед кванторами**:

◦ ¬(∀x A(x)) эквивалентно ∃x ¬A(x)

◦ ¬(∃x A(x)) эквивалентно ∀x ¬A(x)

6. **Вынесение кванторов за скобки**:

(∀x A(x)) ∧ B эквивалентно ∀x (A(x) ∧ B), если x не входит свободно в B

(∃x A(x)) ∧ B эквивалентно ∃x (A(x) ∧ B), если x не входит свободно в B

(∀x A(x)) ∨ B эквивалентно ∀x (A(x) ∨ B), если x не входит свободно в B

(∃x A(x)) ∨ B эквивалентно ∃x (A(x) ∨ B), если x не входит свободно в B

7. **Объединение одноименных кванторов**:

◦ ∀x ∀y A(x, y) эквивалентно ∀y ∀x A(x, y)

◦ ∃x ∃y A(x, y) эквивалентно ∃y ∃x A(x, y)

8. **Распределение кванторов над конъюнкцией и дизъюнкцией**:

◦ ∀x (A(x) ∧ B(x)) эквивалентно (∀x A(x)) ∧ (∀x B(x))

◦ ∃x (A(x) ∨ B(x)) эквивалентно (∃x A(x)) ∨ (∃x B(x))

9. **Выделение области действия квантора**:

◦ ∀x (A(x) ∨ B) эквивалентно (∀x A(x)) ∨ B, если x не входит свободно в B

◦ ∃x (A(x) ∧ B) эквивалентно (∃x A(x)) ∧ B, если x не входит свободно в B

10. Преобразование матрицы к КНФ или ДНФ:

После вынесения всех кванторов матрица преобразуется к конъюнктивной или дизъюнктивной нормальной форме.

**Алгоритм преобразования формул в ПНФ**

1. **Устранение импликации и эквивалентности**: Заменить все вхождения A → B на ¬A ∨ B и все вхождения A↔ B на (¬A ∨ B) ∧ (¬B ∨ A).

**2. Ограничение области действия отрицания**: С помощью законов де Моргана и двойного отрицания преобразовать формулу так, чтобы отрицания стояли только перед атомарными формулами или кванторами.

**3. Переименование связанных переменных**: Переименовать связанные переменные так, чтобы каждая переменная была связана только одним квантором и не совпадала по имени со свободными переменными.

4. **Устранение отрицания перед кванторами**:

Заменить ¬∀x A(x) на ∃x ¬A(x) и ¬∃x A(x) на ∀x ¬A(x).

**5. Вынесение кванторов за скобки**: Вынести все кванторы в начало формулы, используя правила вынесения кванторов за скобки и правила распределения кванторов.

**6. Преобразование матрицы**: Преобразовать бескванторную часть (матрицу) к конъюнктивной или дизъюнктивной нормальной форме.

**8. Скулемовская стандартная форма и процедура преобразования**

**Определение скулемовской стандартной формы**

Скулемовская стандартная форма — это предваренная нормальная форма, в которой:

1. Все кванторы вынесены в начало формулы.

2. Все кванторы существования (∃) устранены путем их замены на функции (скулемовские функции) от переменных, связанных кванторами всеобщности (∀), которые предшествуют данному квантору существования.

3. Префикс содержит только кванторы всеобщности (∀).

4. Матрица преобразована к конъюнктивной нормальной форме.

**Процедура преобразования формул в скулемовскую стандартную форму**

**1. Преобразование к предваренной нормальной форме**: Преобразовать формулу к предваренной нормальной форме с помощью алгоритма, описанного выше.

2. **Скулемизация** (устранение кванторов существования):

a. Если квантор существования ∃y не находится в области действия ни одного квантора всеобщности, то переменная y заменяется на новую константу c (скулемовскую константу).

b. Если квантор существования ∃y находится в области действия кванторов всеобщности ∀x₁, ∀x₂, ..., ∀xₙ, то переменная y заменяется на терм f(x₁, x₂, ..., xₙ), где f — новая функциональная константа (скулемовская функция).

c. После замены квантор ∃y удаляется из префикса.

**3. Преобразование матрицы к КНФ**: Преобразовать бескванторную часть (матрицу) к конъюнктивной нормальной форме.

**Пример преобразования**

Рассмотрим формулу: ∀x (P(x) → ∃y Q(x, y))

1. Устранение импликации: ∀x (¬P(x) ∨∃y Q(x, y))

2. Преобразование к ПНФ (вынесение кванторов): ∀x ∃y (¬P(x) ∨ Q(x, y))

3. Скулемизация: ∃y находится в области действия ∀x, поэтому y заменяется на f(x), где f — новая скулемовская функция: ∀x (¬P(x) ∨ Q(x, f(x)))

4. Префикс содержит только кванторы ∀, а матрица уже находится в КНФ.

Итоговая скулемовская стандартная форма:∀x(¬P(x) ∨ Q(x,f(x)))